

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Maria Gabriela Dokurno

Kierunek: matematyka

Numer albumu: 407539

**Twierdzenie Grinberga
i jego zastosowania**

**Grinberg's theorem
and its applications**

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr. Marcina Witkowskiego

POZNAŃ 2017

Poznań, dnia
(data)

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany/a student/ka Wydziału Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oświadczam, że przedkładaną pracę dyplomową pt: napisałem/napisałam samodzielnie. Oznacza to, że przy pisaniu pracy, poza niezbędnymi konsultacjami, nie korzystałem/am z pomocy innych osób, a w szczególności nie zlecałem/am opracowania rozprawy lub jej części innym osobom, ani nie odpisywałem/am tej rozprawy lub jej części od innych osób.

Oświadczam również, że egzemplarz pracy dyplomowej w wersji drukowanej jest całkowicie zgodny z egzemplarzem pracy dyplomowej w wersji elektronicznej.

Jednocześnie przyjmuję do wiadomości, że przypisanie sobie, w pracy dyplomowej, autorstwa istotnego fragmentu lub innych elementów cudzego utworu lub ustalenia naukowego stanowi podstawę stwierdzenia nieważności postępowania w sprawie nadania tytułu zawodowego.

* - wyrażam zgodę na udostępnianie mojej pracy w czytelni Archiwum UAM

* - wyrażam zgodę na udostępnianie mojej pracy w zakresie koniecznym do ochrony mojego prawa do autorstwa lub praw osób trzecich

*Należy wpisać TAK w przypadku wyrażenia zgody na udostępnianie pracy w czytelni Archiwum UAM, NIE w przypadku braku zgody. Niewypełnienie pola oznacza brak zgody na udostępnianie pracy.

.....
(czytelny podpis studenta)

Spis treści

Streszczenie	7
Abstract	9
Rozdział 1. Podstawowe definicje	11
Rozdział 2. Warunki na graf hamiltonowski	13
Rozdział 3. Twierdzenie Grinberga	17
3.1. Twierdzenie oraz dowód	17
3.2. Zastosowanie twierdzenia na przykładach	20
3.3. Zastosowanie Twierdzenia Grinberga w grafach nieplanarnych	22
Rozdział 4. Zastosowanie twierdzenia Grinberga do dolnego oszacowania na liczbę Hamiltonowską grafu planarnego	25
4.1. Ograniczenia na liczbę hamiltonowska	25
4.2. Liczba Grinberga	26
4.3. Zastosowania liczby Grinberga	30
Bibliografia	33

Streszczenie

Tematem poniższej pracy jest Twierdzenie Grinberga oraz jego zastosowania. Cała praca zawiera cztery rozdziały. W pierwszym rozdziale przedstawione są podstawowe definicje z teorii grafów. W drugim rozdziale wymienione są proste warunki na to, aby graf był grafem hamiltonowskim. Trzeci rozdział przedstawia Twierdzenie Grinberga, które jest warunkiem koniecznym na to, aby graf planarny posiadał cykl Hamiltona. Twierdzenie jest udowodnione, a następnie zastosowane na przykładach. Następnie, w czwartym rozdziale, pokazane oraz udowodnione jest twierdzenie, które wykorzystuje Twierdzenie Grinberga, by w grafach planarnych znaleźć długość najkrótszego spaceru hamiltonowskiego. Na przykładowych grafach planarnych pokazane jest zastosowanie liczby Grinberga, by oszacować ich liczbę hamiltonowską.

Abstract

The subject of the thesis is Grinberg's Theorem and its applications. It contains four chapters. Basic information about graph theory were presented in the first chapter. In the second chapter simple conditions for graphs to be Hamiltonian are listed. The third chapter shows the Grinberg's theorem, which is a necessary condition for planar graphs to contain a Hamiltonian cycle. The theorem was proven and shown on examples. In the fourth chapter, a theorem, which uses Grinberg's theorem to find a length of shortest spanning walk in planar graphs was presented and proven. What is more, the application of the Grinberg number, to estimate Hamiltonian number, was shown on examples.

Rozdział 1

Podstawowe definicje

W tym rozdziale zostanie przedstawionych kilka podstawowych definicji z teorii grafów, wykorzystywanych w pracy. Przypomnimy niektóre własności i twierdzenia dotyczące grafów (korzystając z definicji z [1], [2]). Szczególną uwagę skierujemy na grafy hamiltonowskie.

Definicja 1. (Graf) *Grafem nazywamy uporządkowaną parę $G := (V, E)$, gdzie zbiór V jest zbiorem wierzchołków, a zbiór E jest zbiorem dwuelementowych podzbiorów zbioru V zwanych krawędziami.*

Definicja 2. (Graf planarny) *Graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, by żadne dwie krawędzie nie przecinały się ze sobą poza wierzchołkiem, z którym obie są incydentne, nazywamy grafem planarnym.*

Definicja 3. (Stopień wierzchołka) *Liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka v nazywamy stopniem wierzchołka. Oznaczamy ją przez $\deg(v)$.*

Definicja 4. (Ściana) *Jeśli G jest grafem planarnym, to każdy rysunek płaski grafu G dzieli zbiór punktów płaszczyzny, które nie leżą na G , na obszary zwane ścianami. Każdy taki graf posiada także ścianę zewnętrzną (nieograniczoną). Zbiór ścian grafu G oznaczamy przez $F(G)$.*

Definicja 5. (Ścieżka) *Niepusty graf $P = (V, E)$, przy czym*

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

gdzie x_i są różne, nazywamy ścieżką. Wierzchołki x_0 oraz x_k są połączone przez P i nazywane jej końcami; wierzchołki x_1, \dots, x_{k-1} są wewnętrznymi wierzchołkami P .

Definicja 6. (Spacer) *Spacer (o długości k) w grafie G , to niepusta przemienna sekwencja $v_0e_0v_1e_1 \dots e_{k-1}v_k$ wierzchołków i krawędzi w G takich, że $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ dla wszystkich $i < k$. Jeżeli $v_0 = v_k$, to spacer jest zamknięty. Jeżeli wierzchołki w spacerze są od siebie różne, to definiują ścieżkę w G .*

Definicja 7. (Wzór Eulera) Niech G będzie spójnym, planarnym grafem z n wierzchołkami, m krawędziami, oraz l ścianami. Wtedy zachodzi

$$n - m + l = 2.$$

Definicja 8. (Cykl Hamiltona) Cyklem Hamiltona nazywany jest zamknięty spacer przechodzący przez każdy wierzchołek grafu G (przy czym $|G| \geq 3$) dokładnie raz.

Jeżeli G zawiera cykl Hamiltona, nazywany jest grafem hamiltonowskim.

Definicja 9. (Spacer Hamiltona) Spacer w G zawierający każdy jego wierzchołek nazywana jest spacerem Hamiltona.

Definicja 10. (Widmo hamiltonowskie) Cykliczne uporządkowanie wierzchołków grafu G jest permutacją $s : v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$, gdzie $v_1 = v_{n+1}$. Niech $d(s) = \sum_{i=1}^n \text{dist}(v_i, v_{i+1})$. Gdzie $\text{dist}(v_i, v_{i+1})$ jest odległością w grafie między v_i a v_{i+1} . Zbiór

$$\mathcal{H}(G) = \{d(s)\}$$

nazywamy widmem hamiltonowskim.

Definicja 11. (Liczba Hamiltonowska) Minimalna długość zamkniętego spaceru odwiedzającego wszystkie wierzchołki grafu, nazywana jest liczbą hamiltonowską. Oznaczamy ją przez $h(G)$.

Uwaga 1.

$$h(G) = \min_s d(s)$$

Definicja 12. (Zbiór Grinberga) Niech $\mathcal{G}(G)$ będzie zbiorem wszystkich sum postaci

$$\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i (|F_i| - 2) \right|,$$

gdzie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. $\mathcal{G}(G)$ nazywamy zbiorem Grinberga grafu G .

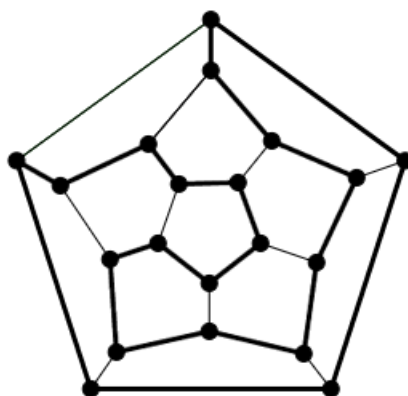
Definicja 13. (Liczba Grinberga) Najmniejszą liczbę spośród $\mathcal{G}(G)$ nazywamy liczbą Grinberga grafu G . Oznaczamy ją przez $g(G)$.

Rozdział 2

Warunki na graf hamiltonowski

Ścieżki oraz cykle Hamiltona zostały nazwane na cześć W.R. Hamiltona (1956), który w liście do swojego przyjaciela Gravesa, opisał matematyczną grę na dwunastościanie (rys. 2.1). Gra polegała na tym, że jedna osoba przypinała pinezki na wybranych przez siebie pięciu kolejnych wierzchołkach, natomiast druga osoba miała za zadanie uzupełnić dalej ścieżkę tak, by utworzyć cykl na wszystkich wierzchołkach tego grafu. Dwunastościan jest grafem hamiltonowskim, natomiast np. graf Herschela (rys. 3.2) jest niehamiltonowski, ponieważ jest dwudzielny i ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

W praktyce określenie, czy graf jest hamiltonowski jest trudnym zagadnieniem. W przypadku grafów hamiltonowskich nie są znane konkretne charakteryzacje, jak to jest np. z grafami eulerowskimi (wzór Eulera). Znalezienie takiej cechy jest ważnym, w dalszym ciągu nierozwiązanym problemem w teorii grafów. Jednakże znamy ogólne warunki dotyczące grafów hamiltonowskich.



Rysunek 2.1. Dwunastościan z przykładowym cyklem Hamiltona.

Definicja 14. (Spójna składowa) *Spójny podgraf grafu G , który nie jest zawarty w większym spójnym podgrafie grafu G nazywamy spójną składową grafu G . Przez $\omega(G)$ oznaczamy liczbę spójnych składowych grafu.*

Twierdzenie 2. (Warunek konieczny) *Jeżeli G jest hamiltonowski, to dla każdego niepustego właściwego podzbioru S zbioru V*

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

Dowód: Niech C będzie cyklem Hamiltona w grafie G . Wtedy, dla każdego niepustego właściwego podzbioru S zbioru V

$$\omega(C - S) \leq |S|$$

Także, $C - S$ jest rozpiętym podgrafem grafu $G - S$, zatem

$$\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$$

□

Twierdzenie 2 może być użyteczne do pokazania, że pewien graf jest niehamiltonowski, lecz nie zawsze jest skuteczne. Przykładem jest graf Petersena, który jest niehamiltonowski, jednakże nie możemy wywnioskować tego faktu z Twierdzenia 2. Dlatego, przedstawimy warunki wystarczające na to, by graf był grafem hamiltonowskim.

Jedno z najsłynniejszych twierdzeń, pozwalających określić, czy graf jest grafem hamiltonowskim, zostało sformułowane przez G. A. Diraca w 1952 roku. Wyprowadzimy je z ogólniejszego twierdzenia, które sformułował norweski matematyk O. Ore w 1960 roku.

Twierdzenie 3. (Twierdzenie Ore) *Jeżeli graf prosty G ma n wierzchołków (gdzie $n \geq 3$) oraz*

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

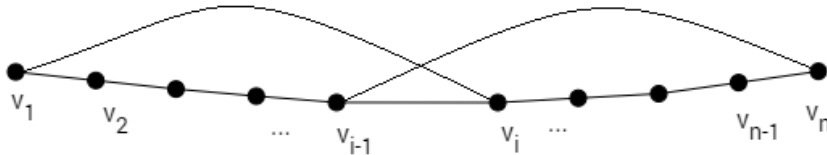
dla każdej pary wierzchołków niesąsiednich v oraz w , to graf G jest hamiltonowski.

Dowód: Załóżmy, że Twierdzenie 3. jest nieprawdziwe. Niech G będzie maksymalnym grafem niehamiltonowskim z $n \geq 3$ wierzchołkami i niech spełnia założenie o stopniach dwóch niesąsiednich wierzchołków. Jeśli dodamy nową krawędź do G , spowoduje to powstanie cyklu Hamiltona (dodawanie krawędzi nie narusza warunku o stopniach wierzchołków). Zauważmy, że wynika z tego, istnienie w G drogi $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ przechodzącej przez każdy wierzchołek grafu. Wiemy natomiast, że G jest niehamiltonowski, zatem wierzchołki

v_1 i v_n nie sąsiadują ze sobą. Jednak z warunku: $\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n$, zatem, istnieje wierzchołek v_i , który sąsiaduje z wierzchołkiem v_1 , sąsiadujący z wierzchołkiem v_{i-1} , który jest także sąsiadem v_n . (rys. 2.2). Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ droga

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1$$

jest cyklem Hamiltona. □



Rysunek 2.2.

Twierdzenie 4. (Twierdzenie Diraca) *Każdy graf z $n \geq 3$ wierzchołkami i minimalnym stopniem co najmniej $n/2$ posiada cykl Hamiltona.*

Dowód: Niech v oraz u będą wierzchołkami w G o danych założeniach, wtedy

$$\deg(v) + \deg(u) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \geq n$$

z Twierdzenia 3 G jest grafem Hamiltona. □

Rozdział 3

Twierdzenie Grinberga

W 1968 roku łotewski matematyk Grinberg opublikował w swojej pracy twierdzenie, które mówi o warunku koniecznym do posiadania cyklu przez grafy planarne. Twierdzenie to oparte jest na długości ścian grafów planarnych. Odkrycie Grinberga doprowadziło do odkrycia wielu niehamiltonowskich grafów planarnych, w tym także tzw. grafu Grinberga. W tym rozdziale przedstawimy owe twierdzenie oraz w prosty sposób udowodnimy prawdziwość niniejszego warunku w postaci równania. Następnie pokażemy na przykładach jego zastosowanie.

3.1. Twierdzenie oraz dowód

Twierdzenie 5. (Twierdzenie Grinberga) *Jeżeli w grafie istnieje cykl Hamiltona, wtedy dzieli on ten graf na dwie części: wewnątrz cyklu oraz zewnątrz cyklu. Ponieważ żadne krawędzie w grafie nie przecinają się, wewnątrz cyklu Hamiltona jest podzielone na ściany, z których każda posiada pewną liczbę krawędzi. Niech P_k^i oznacza liczbę ścian wewnątrz cyklu z dokładnie k krawędziami. Zewnątrz cyklu jest także podzielone na ściany, każda mająca pewną liczbę krawędzi (z jedną nieograniczoną ścianą). Niech P_k^o będzie liczbą ścian na zewnątrz cyklu z dokładnie k krawędziami. Twierdzenie Grinberga mówi, że*

$$\sum_{j=3}^N (j-2)(P_j^o - P_j^i) = 0.$$

Dowód: Niech (G, V) będzie grafem planarnym o N wierzchołkach. Przypomnijmy, że cykl Hamiltona w grafie dzieli płaszczyznę na dwie części: wewnątrz oraz zewnątrz. Niech D_i stanowi liczbę krawędzi w środku cyklu oraz D_o liczbę krawędzi na zewnątrz cyklu. Ponieważ żadne krawędzie się nie przecinają, prawdą jest, że każda krawędź grafu G spełnia dokładnie jeden z warunków:

- należy do cyklu Hamiltona
- leży wewnątrz cyklu
- leży na zewnątrz cyklu.

Ponieważ cykl Hamiltona musi mieć dokładnie N krawędzi, to całkowita liczba krawędzi w grafie jest równa $D_i + D_o + N$.

Niech $e_1, e_2, e_3 \dots e_{D_i}$ będą krawędziami wewnątrz cyklu Hamiltona (w dowolnej kolejności). Zauważmy, że e_1 dzieli pojedynczą ścianę, ustaloną przez cykl Hamiltona, na dokładnie dwie części. Ponieważ żadne krawędzie się nie przecinają, e_2 dzieli jedną z tych dwóch ścian na dokładnie dwie części: stąd e_1 i e_2 razem dzielą jedną ze ścian, ustaloną przez cykl Hamiltona, na dokładnie trzy części. Podobnie, ponieważ żadne krawędzie się nie przecinają, to e_3 dzieli dokładnie jedną z tych trzech ścian na dwie części; stąd e_1, e_2 i e_3 razem dzielą ścianę, ustaloną przez cykl Hamiltona, na dokładnie cztery ściany. Kontynuując w ten sposób, otrzymujemy, że krawędzie $e_1, e_2, e_3 \dots e_{D_i}$ dzielą ścianę, ustaloną przez cykl Hamiltona, na dokładnie $D_i + 1$ ścian.

Ponieważ każda ściana wewnątrz ścieżki Hamiltona posiada pewną liczbę krawędzi pomiędzy 3 a N , prawdą jest, że

$$\sum_{j=3}^N P_j^i = D_i + 1. \quad (3.1)$$

Z drugiej strony, możemy policzyć krawędzie wewnątrz ścieżki Hamiltona zauważając, że każda ściana z j krawędziami dodaje j do całkowitej liczby krawędzi grafu. Jednakże, zliczając w ten sposób sumujemy każdą krawędź wewnątrz ścieżki Hamiltona dwa razy, a każdą krawędź należącą do ścieżki Hamiltona tylko jeden raz. Zatem

$$\sum_{j=3}^N jP_j^i = N + 2D_i. \quad (3.2)$$

Z równania (3.1) otrzymujemy, że

$$D_i = \sum_{j=3}^N P_j^i - 1. \quad (3.3)$$

Podstawiając do równania (3.2), otrzymujemy

$$\sum_{j=3}^N jP_j^i = N + 2\left(\sum_{j=3}^N P_j^i - 1\right). \quad (3.4)$$

Po przekształceniu równania (3.4), otrzymujemy

$$\sum_{j=3}^N jP_j^i - 2\left(\sum_{j=3}^N P_j^i - 1\right) = N - 2.$$

Zatem,

$$N - 2 = \sum_{j=3}^N jP_j^i - \sum_{j=3}^N 2P_j^i = \sum_{j=3}^N (jP_j^i - 2P_j^i) = \sum_{j=3}^N (j - 2)P_j^i. \quad (3.5)$$

To samo rozumowanie co powyżej, można zastosować do zewnątrz ścieżki Hamiltona. Niech $e_1, e_2, e_3 \dots, e_{D_i}$ będą krawędziami na zewnątrz ścieżki Hamiltona (w dowolnej kolejności). Dzielą one nieograniczoną ścianę, ustaloną przez cykl Hamiltona, na dokładnie $D_i + 1$ ścian.

Ponieważ każda ściana na zewnątrz ścieżki Hamiltona posiada pewną liczbę krawędzi pomiędzy 3 a N , prawdą jest, że

$$\sum_{j=3}^N P_j^o = D_o + 1. \quad (3.6)$$

Tak jak wcześniej, możemy także policzyć krawędzie na zewnątrz ścieżki Hamiltona zauważając, że każda ściana z j krawędziami dodaje j do całkowitej liczby krawędzi grafu. Jednakże, w ten sposób zliczamy każdą krawędź na zewnątrz ścieżki Hamiltona dwa razy, a każdą krawędź należącą do ścieżki Hamiltona tylko jeden raz. Zatem

$$\sum_{j=3}^N jP_j^o = N + 2D_o. \quad (3.7)$$

Z równania (3.6) otrzymujemy

$$D_o = \sum_{j=3}^N P_j^o - 1. \quad (3.8)$$

Podstawiając do w równania (3.7) otrzymujemy

$$\sum_{j=3}^N jP_j^o = N + 2\left(\sum_{j=3}^N P_j^o - 1\right). \quad (3.9)$$

Przekształcając równanie (3.9), otrzymujemy

$$\sum_{j=3}^N jP_j^o - 2\left(\sum_{j=3}^N P_j^o - 1\right) = N - 2.$$

Zatem,

$$N - 2 = \sum_{j=3}^N jP_j^o - \sum_{j=3}^N 2P_j^o = \sum_{j=3}^N (jP_j^o - 2P_j^o) = \sum_{j=3}^N (j - 2)P_j^o. \quad (3.10)$$

Odejmując równanie (3.5) od równania (3.10), otrzymujemy

$$\sum_{j=3}^N (j - 2)P_j^o - \sum_{j=3}^N (j - 2)P_j^i = 0,$$

więc

$$\sum_{j=3}^N (j - 2)(P_j^o - P_j^i) = 0.$$

□

3.2. Zastosowanie twierdzenia na przykładach

Poprzez sprawdzenie warunku koniecznego, podanego przez Grinberga, dla grafów planarnych, do posiadania cyklu Hamiltona, możemy w prosty sposób sprawdzić, że graf jest niehamiltonowski. Pokażemy w ten sposób, że graf Grinberga oraz graf Hershela nie mają cykli Hamiltona.

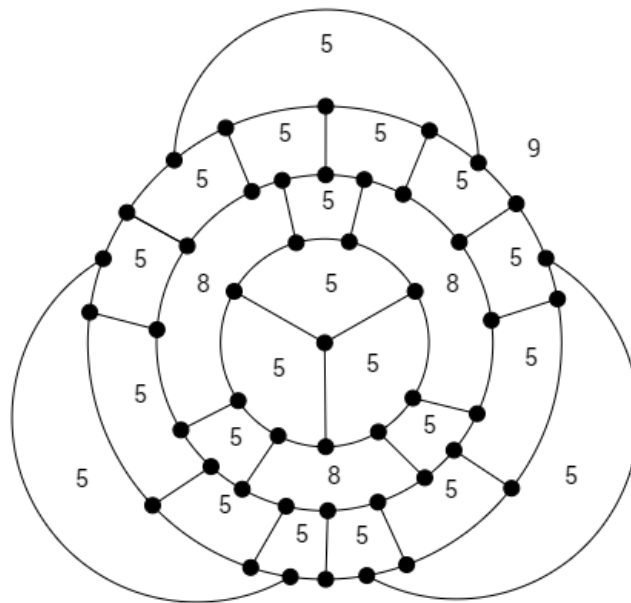
1. Załóżmy, że graf Grinberga (rys. 3.1) jest hamiltonowski. Wiemy, że ma on ściany o długościach pięć, osiem oraz dziewięć. Na mocy warunku z Twierdzenia 5

$$3(P_j^o - P_j^i) + 6(P_j^o - P_j^i) + 7(P_j^o - P_j^i) = 0.$$

Powinno zachodzić

$$7(P_j^o - P_j^i) \cong 0 \pmod{3}.$$

Jednakże, to wyrażenie nie może przystawać do 0 mod 3. Zatem graf Grinberga nie może być grafem hamiltonowskim.



Rysunek 3.1. Graf Grinberga.

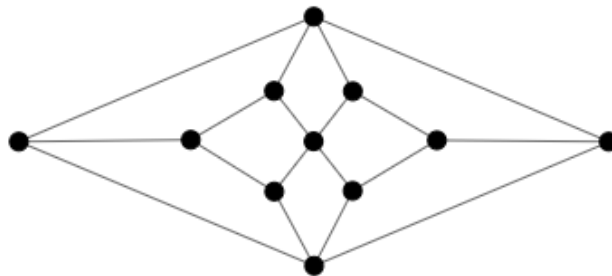
2. Weźmy teraz pod uwagę graf Hershela (rys. 3.2) i założmy, że ma on cykl Hamiltona. Wiemy, że ma on wszystkie ściany o długości cztery. Na mocy warunku z Twierdzenia 5:

$$2(P_j^o - P_j^i) = 0,$$

$$P_j^o - P_j^i = 0,$$

zatem zachodzi równość

$$P_j^o = P_j^i.$$



Rysunek 3.2. Graf Hershela.

Jednakże, równość ta nigdy nie będzie prawdziwa, ponieważ wszystkich ścian w grafie Hershela jest dziewięć. Zatem graf ten jest niehamiltonowski. Co więcej, jest on najmniejszym 3-regularnym grafem niehamiltonowskim.

Wniosek 1. *Ważnym wnioskiem z Twierdzenia Grinberga jest to, że jeśli graf planarny może być przedstawiony w taki sposób, że wszystkie ściany tego grafu, oprócz jednej, są długości 2 mod 3, wtedy ten graf nie jest grafem hamiltonowskim.*

Na przykład w grafie Grinberga z rys. 5 dwie wewnętrzne ściany są długości 5 oraz 8, natomiast nieograniczona ściana jest długości 9, dlatego graf Grinberga nie jest grafem hamiltonowskim.

Dla wszystkich grafów planarnych, jeżeli ściany są długości 2 mod 3, to w równaniu z Twierdzenia Grinberga sumują się do 0 mod 3, dzięki istnieniu czynnika $j - 2$ w tej sumie. Dlatego, jeżeli istnieje dokładnie jedna taka ściana, której długość nie przystaje do 2 mod 3, daje ona niezerowy wynik w ostatecznej sumie, nie spełniając przy tym warunku Grinberga.

Grinberg użył swoje twierdzenie, by znaleźć niehamiltonowskie wielościenne 3-regularne kubiczne grafy. Posłużyły one jako kontrprzykłady dla Hipotezy Taita (każdy 3-regularny kubiczny graf jest grafem hamiltonowskim). Wszystkie grafy nazwane zostały na cześć Grinberga. Są to m.in. 44-wierzchołkowy graf z 24 ścianami, 46-wierzchołkowy z 25 ścianami (rys. 5). Są one tak zbudowane, że ściany wewnętrzne są długości 5 albo 8, a ściana zewnętrzna ma krawędzi. Dlatego z wniosku z Twierdzenia Grinberga nie są hamiltonowskie.

3.3. Zastosowanie Twierdzenia Grinberga w grafach nieplanarnych

Mimo, że Twierdzenie Grinberga jest prawdziwe tylko dla grafów planarnych, to Chia oraz Thomassen [9] pokazali, że może być także wykorzystane, by zbadać istnienie cykli Hamiltona w pewnych klasach grafów nieplanarnych. W ich przypadku były to uogólnione grafy Petersena.

Niech n oraz k będą liczbami całkowitymi takimi, że $1 \leq k \leq n-1$ oraz $n \geq 5$. Zbiorem wierzchołków uogólnionego grafu Petersena $P(n, k)$ jest $\{u_i, v_i : i = 0, 1, \dots, n-1\}$, a jego zbiorem krawędzi jest $\{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ z indeksami zredukowanymi do } \text{mod } n\}$.

Twierdzenie 6. *Niech n będzie liczbą naturalną oraz $n \geq 5$. Wtedy $P(n, 2)$ jest niehamiltonowski, jeśli $n \not\equiv 5 \pmod{6}$.*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na Twierdzeniu Grinberga dla grafów planarnych. Metoda polega na zauważeniu, że po usunięciu dwóch krawędzi

z grafu $P(n, 2)$ otrzymujemy graf planarny, którego zbiór długości ścian to $(5, \dots, 5, \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2})$ i dlatego, gdy $n \cong 5 \pmod{6}$ graf jest niehamiltonowski z warunku z Twierdzenia Grinberga ($\frac{n+5}{2}$ i $\frac{n+7}{2}$ przystają odpowiednio do $2, 0 \pmod{3}$). Wnioskujemy wtedy, że jeżeli $P(n, 2)$ posiada cykl Hamiltona C , to musi zawierać co najmniej jedną z tych krawędzi. Dzięki symetrii w tych grafach dochodzimy do wniosku, że liczba wierzchołków powinna przystawać do $0 \pmod{3}$. Zatem $P(n, 2)$ nie posiada cyklu Hamiltona, jeśli $n \cong 5 \pmod{6}$.

Rozdział 4

Zastosowanie twierdzenia Grinberga do dolnego oszacowania na liczbę Hamiltonowską grafu planarnego

Nie każdy graf jest hamiltonowski, natomiast każdy spójny graf posiada zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach. Najkrótszy taki spacer nazywany jest spacerem Hamiltona, a jego długość określona jest przez $h(G)$ – liczbę hamiltonowską. Liczba ta może być rozumiana jako miara, pokazująca jak bardzo dany graf odbiega od bycia grafem hamiltonowskim.

W tym rozdziale pokażemy, jak twierdzenie Grinberga można zastosować, by określić dolne ograniczenie na liczbę Hamiltonowską w grafach planarnych. Przedstawione wyniki pochodzą z pracy [4].

4.1. Ograniczenia na liczbę hamiltonowska

Zobaczmy jak liczba hamiltonowska była określana przez znanych matematyków.

Określenie ograniczeń na liczbę Hamiltonowską nie jest prostym zadaniem. Dla spójnego grafu G o n wierzchołkach, podstawowymi ograniczeniami są

$$n \leq h(G) \leq 2(n - 1).$$

Wiadomo, że spacer Hamiltona w G musi odwiedzić każdy jego wierzchołek, co daje nam dolne ograniczenie. Jednakże, zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach w drzewie rozpiętym ma długość $2(n - 1)$, co daje górną granicę.

Przez lata większość badań nad liczbą hamiltonowską rozwinęły się pod względem udoskonalania jej coraz węższych granic lub oszacowań liczb hamiltonowskiej dla specjalnych grafów lub rodzin grafów.

Goodman i Hedetniemi [6] udowodnili:

Niech G będzie k -spójnym grafem o n wierzchołkach o średnicy d , wtedy

$$h(G) \leq 2(n - 1) - \lfloor k/2 \rfloor (2d - 2),$$

co udoskonała podstawowe górne ograniczenie.

Bermond [7] zainspirowany twierdzeniem Ore'go udowodnił twierdzenie:

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i niech $c \leq n$; jeżeli $\deg(v) + \deg(w) \leq c$ dla każdej pary nieprzyległych wierzchołków v oraz w , wtedy

$$h(G) \leq 2n - c.$$

Chartrand, Thomas, Zhang, i Saenpholphat [8] przedstawili alternatywne podejście do liczby Hamiltona. Niech G będzie spójnym grafem o n wierzchołkach, a $H(G)$ spektrum Hamiltona tego grafu. Wtedy

$$h(G) = \min H(G).$$

Pokazali także, że $h(G) \leq 2(n-1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest drzewem. Udowodnili, że dla każdej liczby całkowitej $n \leq 3$, każda liczba całkowita w przedziale $[n, 2(n-1)]$ jest liczbą Hamiltona pewnego grafu o n wierzchołkach.

4.2. Liczba Grinberga

Niech G będzie grafem planarnym i niech jego ściany (wraz z nieograniczoną ścianą) będą oznaczone F_1, F_2, \dots, F_n . Mając ścianę F , niech $|F|$ oznacza jej długość, czyli liczbę jej krawędzi (lub wierzchołków). Niech $\mathcal{G}(G)$ będzie zbiorem wszystkich sum postaci

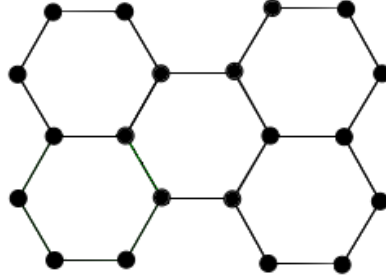
$$\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i (|F_i| - 2) \right|,$$

gdzie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$, wykluczając dwa przypadki gdy wszystkie elementy są tego samego znaku. Zbiór $\mathcal{G}(G)$ nazywany zbiorem Grinberga, a najmniejszą liczbę w tym zbiorze nazywamy liczbą Grinberga. Na przykład graf zaprezentowany na Rysunku 4.1 ma pięć wewnętrznych ścian, będących sześciokątami oraz zewnętrzną ścianą mającą 18 krawędzi. Zbiorem Grinberga dla tego grafu jest, więc $\{4, 12, 20, 28\}$, a liczbą Grinberga jest 4.

Twierdzenie Grinberga mówi, że jeśli graf planarny G jest hamiltonowski, wtedy $g(G) = 0$. Następujące twierdzenie wykorzystuje liczbę Grinberga, by znaleźć minimalną liczbę powtórzonych wierzchołków w spacerze po wszystkich wierzchołkach dowolnego grafu planarnego.

Twierdzenie 7. [4] *Niech G będzie grafem planarnym. Zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach grafu musi zawierać $g(G)/2$ powtórzeń wierzchołków.*

Dowód: Niech wierzchołki planarnego grafu G będą oznaczone odpowiednio $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i niech σ będzie zamkniętym spacerem po wszystkich wierzchołkach w G , zapisanym jako lista tych wierzchołków. Po pierwsze skonstruujemy nowy multigraf G' , zwany zredukowanym grafem G , zależny od σ . Zredukowany graf tworzony jest według następujących procedur:



Rysunek 4.1. Graf o zbiorze Grinberga $\{4, 12, 20, 28\}$ i liczbą Grinberga równą 4.

Usuwanie krawędzi Usuujemy wszystkie krawędzie, których nie ma w σ .

Powielanie krawędzi Jeśli jakaś krawędź z G pojawia się więcej niż raz w σ , wtedy tworzymy dodatkową krawędź w G' , dla każdego powtórzenia krawędzi w tym spacerze.

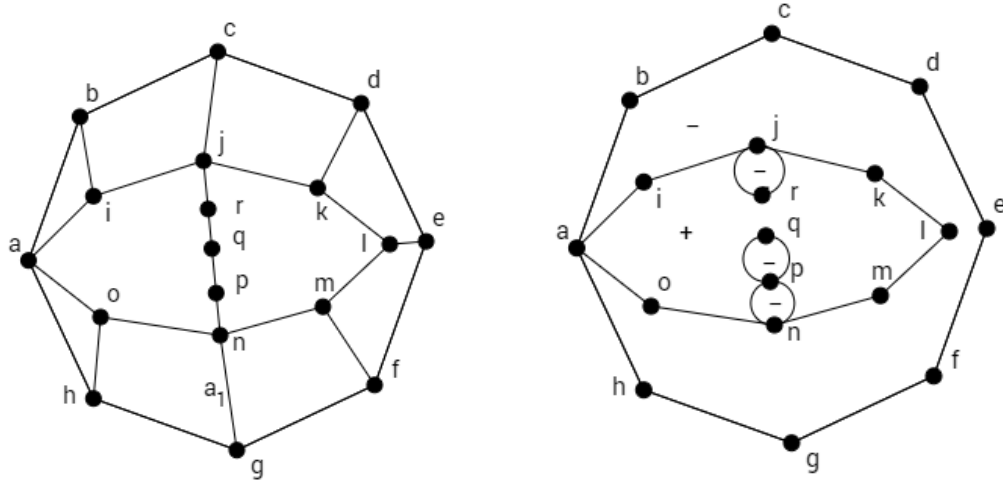
Mimo, że zredukowany graf G' jest w dalszym ciągu grafem planarnym, niekoniecznie jest on grafem prostym. Ściany G' oznaczone są za pomocą $a+$ albo $a-$ według następujących reguł: nieograniczona ściana jest oznaczona jako $+$; następnie, jeśli ściana G' jest przyległa (dzieli krawędź) z $a+$ obszarem, to jest oznaczona jako $-$, natomiast jeśli ściana z G' jest przyległa do $a-$ obszaru, wtedy oznaczona jest jako $+$. Przykład planarnego grafu oraz jego zredukowanego grafu zależnego od rozpiętego, zamkniętego spaceru po wszystkich wierzchołkach jest przedstawiony na rys. 4.2

Istnieje pewna, prosta zależność między liczbą ścian G' oraz liczbą powtórzeń krawędzi w zamkniętym rozpiętym spacerze σ . Dla każdego i , $1 \leq i \leq n$, niech m_i zlicza ile razy v_i jest powielany w spacerze σ . Z tym, że jeśli wierzchołek v_i pojawia się tylko raz w σ , to $m_i = 0$. Niech Φ zlicza ściany zredukowanego grafu G' . Korzystając ze wzoru Eulera, pokażemy, że

$$\Phi = 2 + \sum_{i=1}^n m_i. \quad (4.1)$$

Stopień wierzchołka v_i to $2m_i + 2$, dlatego liczba krawędzi G' jest połową sumy wszystkich stopni wierzchołków, czyli $\sum_{i=1}^n (m_i + 1)$. Zatem

$$n - \sum_{i=1}^n (m_i + 1) + \Phi = 2,$$



Rysunek 4.2. Graf planarny (po lewo) i jego graf zredukowany (po prawo) utworzony według zamkniętej ścieżki po wszystkich wierzchołkach: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, p, n, o, a$. Graf zredukowany posiada 4 powtórzone wierzchołki i 6 ścian.

Z czego wynika równanie (4.1). Niech ściany G' będą podzielone zgodnie z ich znakami. Niech A^+ oznacza pozytywnie oznaczone ściany, natomiast A^- oznacza negatywnie oznaczone ściany oraz odpowiednio n_+ i n_- będą ich liczbami. Ponieważ każda krawędź G' przylega do pozytywnie oraz do negatywnie oznaczonej ściany, zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n_+} |A^+| = \sum_{i=1}^{n_-} |A^-|.$$

Niech $\Delta = n_- - n_+$, będzie różnicą pomiędzy liczbą negatywnie oraz pozytywnie oznaczonych ścian G' . Wtedy

$$\left| \sum_{i=1}^{n_+} (|A^+| - 2) - \sum_{i=1}^{n_-} (|A^-| - 2) \right| = 2 |\Delta|. \quad (4.2)$$

Zmodyfikujemy to równanie, by scalić ściany z G . Niech ściany z G będą oznaczone jako $\{F_i : 1 \leq i \leq N\}$. Każda ściana z G jest zawarta w unikalnej ścianie z G' . Dla każdego i , $1 \leq i \leq N$, niech ϵ_i będzie znakiem ściany G' , która zawiera F_i . Pokażemy, że

$$\left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i (|F_i| - 2) \right| = 2 |\Delta|. \quad (4.3)$$

By potwierdzić to rozumowanie, posłużymy się strategią Grinberga: dodamy do G' , kolejno, te krawędzie z G , które nie zawierają się w σ . Każda krawędź

dzieli ścianę G' na dwie podściany z tym samym znakiem co pierwotna ściana. Dla jasności, powiedzmy, że ściana oznaczona jako $a+$ jest podzielona przez krawędź z G na dwie podściany $A_{i_1}^+$ oraz $A_{i_2}^+$. Ponieważ te dwie podściany dzielą ze sobą dokładnie jedną krawędź, mamy:

$$|A_i^+| - 2 = (|A_{i_1}^+| - 2) + |A_{i_2}^+| - 2).$$

Możemy zastąpić $(|A_{i_1}^+| - 2) + |A_{i_2}^+| - 2$ przez $|A_i^+| - 2$ w równaniu (4.2) i zachować równość. Kontynuujemy ten proces dopóki wszystkie krawędzie nie zostaną dodane. Postępując w ten sposób, prawie uzyskujemy równanie (4.3). Jedyną różnicą związaną jest ze ścianami G' , otoczonymi multikrawędziami. Każda ściana ma tylko dwie krawędzie, dlatego liczona jest jako 0 w sumie. W ten sposób dochodzimy z (4.2) do (4.3). Z definicji liczby Grinberga oraz równania (4.3)

$$g(G) \leq \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i |F_i| - 2 \right| = 2 |\Delta|.$$

Przypomnijmy, że n_- oraz n_+ zliczają negatywnie oraz pozytywnie oznaczone ściany G' i każda z nich musi równać się co najmniej 1. Ponieważ sumują się one do σ , otrzymujemy $|\Delta| \leq \Phi - 2$. Bazując na równaniu (1), otrzymujemy

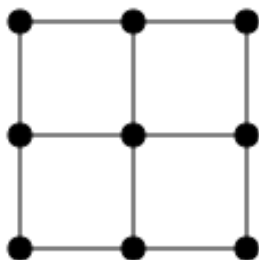
$$\frac{1}{2}g(G) \leq \sum_{i=1}^n m_i.$$

Co należało pokazać. □

4.3. Zastosowania liczby Grinberga

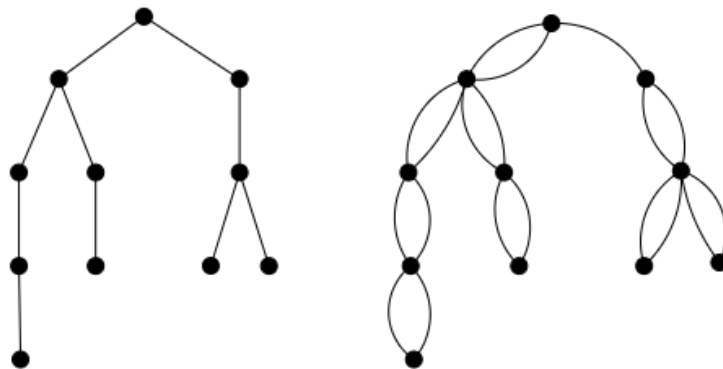
W tej części zaprezentujemy kilka przykładów zastosowania Twierdzenia 7 dla różnych grafów.

1. Liczba Grinberga grafu z rys. 4.1 jest równa 4; czyli, każdy zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach tego grafu musi zawierać 2 powtórzenia wierzchołków. Prostim zadaniem jest znalezienie w tym grafie takiego spaceru, gdzie powtarzają się dwa wierzchołki. Zatem jest to optymalne.
2. Weźmy pod uwagę prosty graf z rys 4.3. Zewnętrzna ściana ma 8 krawędzi; każda z czterech wewnętrznych ścian ma 4 krawędzie. Liczba Grinberga tego grafu jest równa 2 i jakikolwiek zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach musi zawierać co najmniej jeden powtórzony wierzchołek. Prosto jest znaleźć przykład takiego spaceru.



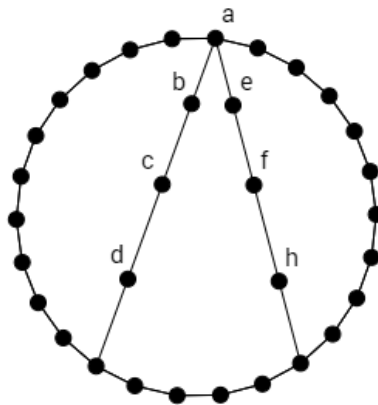
Rysunek 4.3. Prosty graf o liczbie Grinberga równej 2.

3. Liczba Grinberga w drzewie może być obliczona za pomocą podwojenia każdej krawędzi, a następnie policzonej liczbie Grinberga z powstałego grafu planarnego. Zmieniona wersja drzewa z rys. 4.4 ma ścianę zewnętrzną z 20 krawędziami oraz 10 wewnętrznych ścian z 2 krawędziami. Liczba Grinberga tego drzewa jest równa 18, i każdy zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach grafu musi zawierać co najmniej 9 powtórzonych wierzchołków.
4. Graf zaprezentowany na rys. 4.5 ma ścianę zewnętrzną z 26 krawędziami oraz trzy ściany wewnętrzne, każda z 14 krawędziami. Jego liczba Grinberga jest równa 12; zatem jakikolwiek spacer po wszystkich wierzchołkach tego



Rysunek 4.4. Drzewo oraz spacer po wierzchołkach tego drzewa.

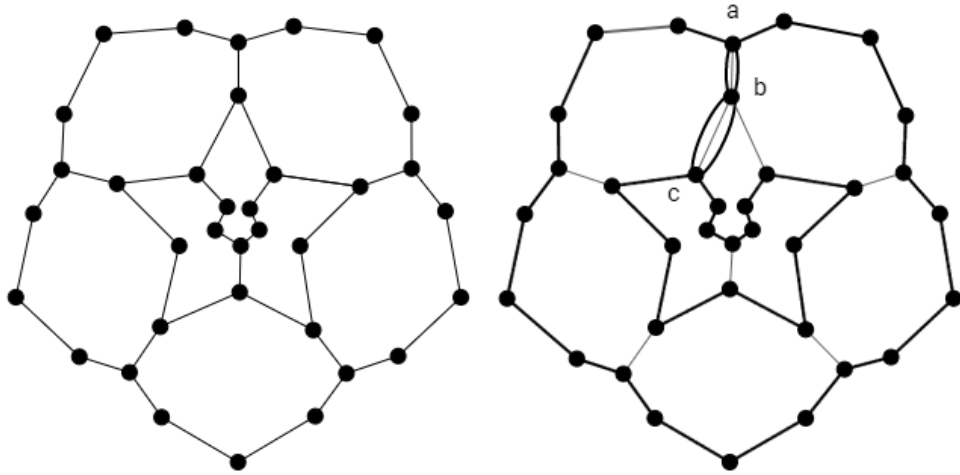
grafu musi zawierać co najmniej 6 powtórzeń. Łatwo jest znaleźć taki spacer z 6 powtórzeniami. Na przykład zaczynając w wierzchołku a , okrążyć zewnętrznie grafu wracając do wierzchołka a . Następnie kontynuować spacer dodając kolejno $a, b, c, d, c, b, a, e, f, g, f, e, a$. Ten spacer ma dokładnie 6 powtórzeń wierzchołków: a (dwa razy), b, c, e oraz f .



Rysunek 4.5. Graf z liczbą Grinberga równą 12. Zamknięty spacer po tym grafie musi mieć co najmniej 6 powtórzeń wierzchołków.

5. Rys.4.6 przedstawia graf z 8 wewnętrznymi ścianami, które są ośmiokątami, oraz zewnętrzną ścianę z 20 krawędziami. Liczba Grinberga tego grafu jest równa 6. Każdy zamknięty spacer po wszystkich wierzchołkach tego grafu

musi zawierać co najmniej 3 powtórzenia wierzchołków. Taki spacer jest pokazany na rys.4.6 na prawym grafie.



Rysunek 4.6. Graf z liczbą Grinberga równą 6 wraz z pokazanym spacerem Hamiltona z trzema powtórzeniami na prawym rysunku.

Bibliografia

- [1] Diestel, R. (1996): *Graph Theory*. Springer Verlag, New York.
- [2] Wilson, R.J. (1998): *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976): *Graph Theory with applications*. 53–54, 160–163., U.S.A.
- [4] Thomas, L. (2015): *On the Hamiltonian Number of a Planar Graph*, arXiv:1508.06892v1.
- [5] Grinberg, È. Ja. (1968): *Plane homogeneous graphs of degree three without Hamiltonian circuits*, Latvian Math. Yearbook 4 (in Russian), Riga: Izdat. "Zinatne", pp. 51–58, MR 0238732. English translation by Dainis Zeps, arXiv:0908.2563.
- [6] S. E. Goodman and S. T. Hedetniemi (1974): *On Hamiltonian walks in graphs*. SIAM J. Comput., 3:214–221.
- [7] Bermond, J.-C. (1976): *On Hamiltonian walks*. In Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975), 41–51. Congressus Numerantium, No. XV, Winnipeg, Man. Utilitas Math.
- [8] Chartrand, G., Thomas, T., Zhang, P., and Saenpholphat, V. (2004): *A new look at Hamiltonian walks*. Bull. Inst. Combin. Appl., 42:37–52.
- [9] Chia, G. L., and Thomassen, C. (2011). *Grinberg's Criterion Applied to Some Non-Planar Graphs*. Ars Combinatoria, 100, 3-7.
- [10] Steprans, J. (2011). <http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Steprans/Courses/1200/November>. York University.